

Eszterházy Károly Főiskola

Kaotikus rendszerek

Szakdolgozat

Bíráló konzulens tanár:

Geda Gábor
Adjunktus

Készítette:

Szabó Gábor
IV. évf. számítástechnika

Eger, 2001

Bevezetés	3
1. A káosz újszerű értelmezése	
A káosz tudományos értelmezése	4
2. Bonyolult rendszerek	
A rendszer és a nonlinearitás	6
Egyszerűség, bonyolultság	8
3. A kaotikus rendszerek	
A szabálytalan mozgás	10
Az előrejelezhetőség elvesztése	12
A rend: pontos geometriai szerkezet	14
4. Amit a káosxról még tudni kell	
A zaj és a káosz	17
A valószínűségi leírásról	20
3. A káosz elmélet napjainkban	
A káosz elmélet inerdiszciplináris tudomány	21
5. Gyakorlatban	
Bevezetés a gyakorlati részhez	24
Populáció-dinamika	25
A logisztikus leképezés számítógépes megvalósítása Pascal nyelven:	28
Kísérlet	33
A logisztikus leképezés és a káosz	35
Bifurkációs diagramm (periódus- ketződésék és a káosz)	36
A bifurkációs diagramm számítógépes megvalósítása Pascal nyelven.	37

17

21

Bevezetés

Amióta az ember gondolkodik, keresi a választ a világban felmerülő kérdésekre. Az évezredek során tudományok egész sora alakult ki, melyek célja az ember kíváncsiságának csillapítása, de az igazi hajtómotorja talán a végső igazság megtalálása. A tudományok mai állása szerint egyre több kérdésre racionális válasz adható, gondoljunk csak a fizika, kémia, biológia, matematika, sőt továbbmegyek szociológia eddig elért eredményeire. Azonban adósak maradtak jó néhány kérdés megválaszolásával. Csak néhányat említve közülük: Hogyan jött létre az élet? Hogyan alakulhat ki rend ebben az entrópia kormányozta világegyetemben, amely feltartóztathatatlanul halad a mind nagyobb rendezetlenség felé? Nem állítom, hogy a káoszelmélet létrejöttével közelebb kerültünk ezen kérdések megválaszolásához, de az biztos, hogy forradalmi változásokat eredményezett természetszemléletünkben.

Még néhány évtizeddel ezelőtt is bátran hihettük azt, hogy a világ óraműszerű működésének mozgástörvényei megismerhetők. S minthogy a determinisztikus egyenletek, melyek ezeket leírják - gondoltuk - mindig megjósolható viselkedésre vezetnek, a világ működésének megismerésében, csak a rendelkezésre álló eszközeink precízsege szab határt. Azonban később rájöttek, hogy a világban működő egyszerű törvények is hozhatnak létre rendkívül bonyolult, kiismerhetetlen viselkedést. Ez lett az alapja egy újonnan kialakult tudománynak, a káoszelméletnek, melynek megszületésével a nyugati civilizáció több évszázad alatt összerakott világképe kártyavárként omlott össze.

Dolgozatom első felében, rövid összefoglalását adom a káosz, mint jelenség természetszemléletünket átformáló általános vonásainak, lehetőleg hétköznapi példákat használva, s a technikai részleteket mellőzve. Külön hangsúlyt helyezek néhány olyan pont tisztázására, melyek a káosz fogalmával kapcsolatos félreértések elkerülését segítik. Ezután bemutatom a káosz elmélet kutatási területeit és hatását más tudományokra. A

káoszelmélet kutatási területének, bizonyos részei numerikus módszerekkel modellezhetők, leképezhetők, egyes jelenségek szimulálhatók. Ilyen jelenségek bemutatásához legtöbbször nagyon sok számítási műveletet kell elvégezni, ezért számítógépek elterjedésével az utóbbi két évtizedben hirtelen megfoghatóvá és könnyen szimulálhatóvá váltak a kaotikus mozgás egyes, szokatlan sajátosságai. Ez adta az apropót a dolgozatom harmadik részének megírásához, melyben egy konkrét példa – a logisztikus függvény – alkalmazását, és számítógépes megvalósítását mutatom be.

1. A káosz újszerű értelmezése

A káosz tudományos értelmezése

A káosz szó tudományos jelentése és a káosz hétköznapi jelentése között nagy különbségek vannak, ezért fontosnak tartom ezeket a különbségeket tisztázni.

Magyar Értelmező Kéziszótár 644. oldal

káosz fn. 1. Zűrzavar. 2. Mit Hitregékben: a világ keletkezését megelőző rendezetlen ősi állapot. [nk:lat<gör]

kaotikus mn vál Zűrzavaros.

A káosz szó használata arra a jelenségre, amit a tudományban kaotikusnak nevezünk valójában nem szerencsés. A szó köznapi értelme - "zűrzavar" - ugyanis számos félreértésre ad okot. Fokozottan igaz ez, ha felidézzük a szó eredeti görög jelentését is: "üresség", "semmi". Mint később látni fogjuk az általam tárgyalt káosz jelentése merőben más. A káoszelmélettel foglalkozók, érzékelve a fogalom használata körüli zűrzavart, az angliai Royal Society szervezésében 1986-ban Londonban rendezett nemzetközi káosz-konferencián a következő definíciót javasolták a szótárkészítőknek:

káosz Mat A determinisztikus rendszerekben előforduló sztochasztikus viselkedés.

Igaz, hogy pontos definíció nem létezik a jelenségre, de a fogalom tisztázásának érdekében fontosnak tartom még leírni, néhány káoszelmélettel foglalkozó szakember kiegészítését:

Ian Stewart, matematikus számos ismeretterjesztő könyv világhírű írója

A káosz olyan szabálytalan (véletlenszerű) viselkedés, amelyet teljes egészében szabályok (törvények) irányítanak. Zavaró paradoxon, valóban. A véletlenszerűség abban nyilvánul meg, hogy az ismert determinisztikus törvények ellenére sem tudjuk egy kaotikus rendszer viselkedését hosszútávon előrejelezni, mert a kaotikus mozgás önmagát sohasem ismétlő, aperiodikus mozgás.

Philip Holmes -matematikus

Bizonyos, (általában kisdimenziós) dinamikai rendszerek bonyolult, aperiodikus, vonzó pályái.

Hao Bai- Lin, fizikus

Egy gyorsan szélesedő kutatási terület, amelyhez matematikusok, fizikusok, hidrodinamikusok, ökológusok és sok más terület képviselői mind-mind fontos munkákkal járultak hozzá. És: A természeti jelenségek egy újonnan felfedezett és mindenütt jelenlévő osztálya.

H. Bruce Stewart, alkalmazott matematikus

Látszólag véletlenszerű, visszatérő viselkedés megjelenése, egyszerű determinisztikus (óraműszerű) rendszerekben.

Roderick V. Jensen, elméleti fizikus

Determinisztikus, nonlinearis rendszerek szabálytalan, előrejelezhetetlen viselkedése.

Már e rövid bevezetés után is érezhetjük, hogy az általam tárgyalt káosz jelenség merőben eltér a hétköznapi értelemben vett jelentésétől. Felmerülhet bennünk az a gondolat, hogy valamilyen matematikai, vagy fizikai jelenségről van szó. De a káosz sokkal több ennél, átszövi az életünk minden területét, ezáltal, a matematika, a fizika mellett, a közgazdaságtan, biológia, ökológia, szociológia tudományok szótárában is megtaláljuk. És bár a káosz természettudományos következményei alapvetően újak és fontosak, nem sajátíthatja ki emiatt egyetlen tudomány sem. A káosz minden természettudomány, sőt minden olyan tudomány sajátja, melyben a matematikai leírás hasznosnak bizonyul. Lehet viszont beszélni a káosztudományról, mely új interdiszciplináris terület, s a kaotikus jelenségek általános vonásait kutatja. Sokszor használatos a "káoszelmélet" elnevezés is, de ez kizárja a káosz kísérleti vizsgálatát, ami pedig alapvető fontosságú. A káosz elmélet egy új, kialakulóban lévő tudomány, amelynek a fókuszában a nemlineáris rendszerek vannak. Ahhoz, hogy megértsük a káosz elmélet lényegét, a gyökereknél kell kezdeni, és tisztázni kell néhány alapvető fogalmat.

2. Bonyolult rendszerek

A rendszer és a nonlinearitás

A rendszer szó hallatán olyan dolgokat képzelünk el, amelyek valamilyen kapcsolatban állnak egymással, és ebből a kapcsolatból adódóan egymás ill. valamilyen „egész” működését befolyásolják. Nézzünk erre egy példát! Figyeljünk meg egy kőrakást. A kőrakás minden köve érintkezik legalább egy másik kővel a kőrakásból, ezáltal közvetlenül vagy

közvetetten de a kövek kölcsönösen hatnak egymásra. Ha kiveszünk egy követ a kőrakás aljáról, akkor ez az egész rendszerre hatással lesz: Az instabil helyzetbe került kövek mindaddig mozognak, amíg egy egyensúlyi állapotba nem kerülnek. Mint láttuk, a kövek egymásra is, és ezáltal az egész rendszer viselkedésére kihatnak. Ezzel szemben, ha a kövek nem érintik egymást; a köztük lévő kölcsönhatás olyan minimális, hogy nullának vehetjük, (hiába veszünk el egy követ, a többire nincs hatással) akkor ezen a szinten nem tartoznak egy rendszerbe.

A mi esetünkben fontos kérdés a rendszer modellezhetősége. Más szavakkal készíthető-e egy olyan rendszer (modell), amely visszaadja (produkálja) az eredeti rendszer viselkedését? Az előző példánál maradva, készíthetünk-e egy olyan kőrakást, amelyik előreláthatólag ugyanúgy fog összeomlani, mint az első halom, ha ugyanolyan köveket, ugyanúgy helyezünk egymásra? Amikor modellezésről beszélünk, általában matematikai modellről szoktunk beszélni, de mint látjuk, nem ez az egyetlen mód a rendszerek modellezésére.

A bonyolult rendszerek matematikai modelljének a felállításánál a nonlinearitás problémájával. A káosz elmélet kialakulását megelőzően, a tudomány, a világot a lineáris modell alapján próbálta megérteni. Mivel a differenciálegyenletek lehetővé teszik a lineáris rendszerekben bekövetkező változások kiszámítását, ma már elég nehéz elképzelni azt, hogy világunk, és folyamatai lineárisan írhatók le, hiszen akkor minden az elvárások szerint működne világunkban, de ez ugyebár korántsem így van.

Képzeljünk el egy gyárat lineáris rendszerként. Ki tudjuk számolni a jelenlegi helyzet alapján, hogy ha felveszünk bizonyos számú embert, vagy újabb gyártóeszközöket állítunk munkába, hogy mennyivel több végterméket tudunk gyártani. Ez a linearitás lényege. A rendszer bármelyik pillanatbeli állapota kiszámolható az előző állapotok ismerete esetén. Azonban a legtöbb gyárigazgató tudja, hogy a valóságban ez nem így működik. A munkaerő vagy az eszközök számának változtatása nagyon különböző eredményeket produkál a valóságban a lineáris modell által

előrejelzett eredményektől, mégpedig azért, mert egy gyár valójában egy nonlinearis rendszer, csakúgy, mint a legtöbb rendszer az életben: Az előző állapotok ismerete esetén sem tudjuk megjósolni a pontos viselkedését. Amikor az életből, vagy a természetből ragadunk ki egy rendszert és matematikai modellt próbálunk rá felállítani, grafikusán ábrázolva látjuk, hogy a képe korántsem egyenes. Az ilyen rendszerek pontos viselkedését tehát szinte lehetetlen megjósolni a nonlinearitásuk miatt. Bizonyos adatokra azonban még így is következtethetünk, hiszen a regresszió analízis, olyan eljárás, amivel a nonlinearis adatokat lineáris formára alakítjuk a további vizsgálat és előrejelzés céljából.

A világ lineáris módon történő megközelítésnek az úttörője Sir Isaac Newton volt, a fizika addig meglévő eredményei, és eszközei szolgáltatták a módszert és az egyenleteket a természet modellezéséhez. Az eredmény természetesen az volt, hogy a világ és jelenségei, lineárisan írhatók le. Ezek után, ha egy jelenség nem várt módon viselkedett, akkor ezt az eltérést a kísérletbe csúszott hibának (mérési hibának), vagy egy nem ismert paraméter jelenlétének tulajdonították. Ezt a jelenséget ma zajnak nevezzük. A zaj jelenség, - talán éppen a káoszhoz hasonlósága miatt - fontos része a káoszelméletnek.

Egyszerűség, bonyolultság

A káosz tanulmányozásánál gyakran találkozunk az egyszerűség és a bonyolultság fogalmakkal. Ha megfigyeljük az univerzumot, különböző szemszögből tekinthetjük egyszerűnek és bonyolultnak is. Elvileg a világűrben egyszerű törvények irányítanak mindent, épp ezért feltételezhetjük, hogy ezek az egyszerű törvények az univerzumot is egyszerűvé, kiismerhetővé alakították. Ám ez nem teljesen így van, hiszen most már tudjuk, hogy az egyszerű törvények is eredményezhetnek nagyon bonyolult rendszert.

Mi az a meghatározó tényező, amitől az egyik rendszert komplexebbnek (bonyolultabbnak) tekintjük, mint a másikat? A lineáris rendszereknél ezt

nem túl nehéz megállapítani, Valószínű, hogy az a bonyolultabb, amelyik leírásához több egyenlet és paraméter szükséges. De két nonlinearis, kaotikus rendszer esetében ezzel a módszerrel már nem állapíthatjuk meg, hogy melyik a bonyolultabb, hiszen még a viselkedésüket sem tudjuk megjövendölni. Egy rendszer bonyolultsága mérhető annak a modellnek a bonyolultságával, amely hatékonyan megjövendöli az eredeti rendszer viselkedését. Éppen azért, mert ha modellt készítettünk, akkor már rendelkezünk valamilyen tudással a rendszert irányító törvényekről és paramétereikről, amelyeket már valamilyen matematikai képletekbe foglaltunk. A modellnek minél jobban kell hasonlítani a rendszerhez, amelynek viselkedését modellezi, de ahogy egyre bonyolultabb rendszerekkel van dolgunk, a modellezés is egyre nehezebb feladat. Nagyon bonyolult rendszer mondjuk az időjárás, hiszen nagyon sok minden közrejátszik a kialakulásában; magyarul, a matematikai modelljében nagyon sok paraméternek és egyenletnek kell szerepelni, hogy pontos előrejelzést tudjon adni, de tapasztalatból tudjuk hogy 100%-an biztos előrejelzést lehetetlen adni, ennek okaira később még visszatérek.

Vannak természetesen egyszerűbb rendszerek is. Például nagyon egyszerű megjósolni, hogy mennyi időbe telik vonattal eljutni A városból B városba, ha feltételezzük, hogy nincs a két állomás között megálló. Ez viszonylag egy egyszerű rendszer. Ahhoz, hogy megállapítsuk az úthoz szükséges időt, csak a vonat sebességét és a két állomás közötti távolságot kell ismernünk. A képlet egyszerű: kmph/km .

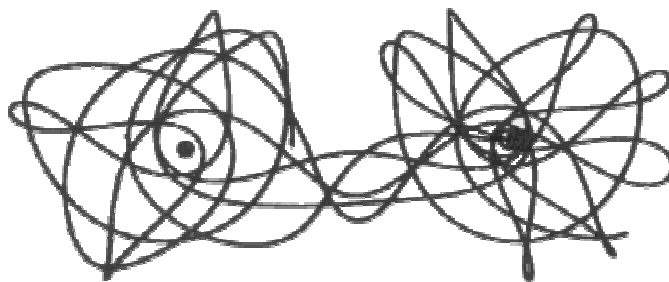
A már említett kőrakásos példa, ami első ránézésre talán egyszerű rendszernek tűnt, most már sejthetjük, hogy valójában nagyon összetett. Ha az a célunk, hogy előre meghatározzuk minden egyes kőnek a végső helyzetét, akkor nagyon részletes információkkal kell rendelkezünk róluk, pontosan ismernünk kell az alakjukat, súlyukat, és a pontos helyzetüket. Ha csak egy jelentéktelen kis alakbeli különbség van modell és a modellezendő kőrakás egyetlen kőve között, a modell által produkált eredmény nagyon eltérő lesz az eredeti kőhalom végső állapotától. Ha az adott rendszer igen

bonyolult, akkor a pontos előrejelzés is nagyon nehézé válik. Ezek után nézzük meg a modern értelemben kaotikusnak nevezett viselkedés általános vonásait.

3. A kaotikus rendszerek

A szabálytalan mozgás

A káosz bonyolult nemlineáris rendszerek sajátos viselkedése. Nem egy pillanatnyi helyzetre, elrendezésre, állapotra vonatkozik, hanem az időbeli viselkedésre. Mivel bármilyen mennyiség időfejlődése általános értelemben mozgásnak tekinthető, a káosz - ebben a modern szóhasználatban - a mozgás, a dinamika jellegére utal. A káosz a körülöttünk lévő rendszerek időbeli viselkedésének általános formája, melyre első ránézésre az is jellemző, hogy nem szabályos. *A káosz önmagát nem ismétlő állandósult mozgás.* Önmagát nem ismétlő mozgáson azt értjük, hogy a mozgás időben nem periodikus, még közelítőleg sem. Ez egyben az egyetlen tulajdonság, ahol a hétköznapi értelemben vett káosszal kapcsolatos összevisszaság jelentés valamelyest megjelenik. Az állandósultság hosszú ideig tartó, nem csillapodó mozgásra utal, ami valamilyen energiabefektetés hatására alakul ki.



1. ábra. Példa a kaotikus viselkedés megnyilvánulására. A három, vagy több testből álló rendszerek mozgása. Az ábra egy bolygó kaotikus mozgását mutatja két nap gravitációs mezőjében.

Kiszámíthatatlan jelenségekkel szinte naponta találkozunk. Gondoljunk csak a gomolygó cigarettafüstre, a forró kávéban elkeveredő tejszínre vagy az időjárás változására. A hétköznapi ember, de a tudománnyal foglalkozó szakemberek többsége is azt mondaná, hogy az ilyen rendszerek viselkedése azért nem jósolható meg, mert nagyon bonyolultak, s olyan sok adatot kellene ismernünk a rendszer állapotának jellemzésére, hogy ezek hiánya lehetetlenné teszi egy jövőbeli állapot pontos kiszámítását. Ilyen alapon azonban már nem lehet megmagyarázni azt, hogy a csillagászok miért nem tudják megjósolni a Saturnus egyik - a bolygó körül egyébként szabályosan keringő, de pályája mentén "bukdácsoló" mozgást végző - krumpliforma holdacskájának, a Hyperionnak a pontos elhelyezkedését. Holott, az égi mechanika törvényei már évszázadok óta ismertek, és a feladat megoldása során csak néhány egyszerű testből álló mechanikai rendszer mozgását kellene előrejelezni. A legkülső bolygók, pl. a Plútó mozgása is kaotikus. Így van ez a kisbolygókkal is, melyek meteoritokként kiszámíthatatlan időközönként érkeznek a Föld légkörébe, s elérésük vezet a hullócsillag jelenséghez. Hasonlóképpen nehezen értelmezhető, hogy például a bizonyos kémiai reakciók oszcillációs viselkedése bizonyos körülmények között kaotikussá is válhat, s így nem tudjuk előrejelezni az akár csak néhány perc múlva bekövetkező oszcilláció amplitudóját.

A káoszelmélet egyik legfontosabb felismerése az, hogy a determinisztikus rendszerek egyszerű törvényei is vezethetnek bonyolult viselkedésre. Az előrejelzés pontatlanságával kapcsolatban pedig azt kell figyelembe vennünk, hogy a kezdeti állapot leírására használt adatokat mindig csak véges pontossággal ismerjük.

Figyeljünk meg két szomszédos vízbuborékokat egy vízesés lábánál. Mondhatunk-e valamit is arról, hogy mekkora távolságra lehetnek egymástól a vízesés legtetején? Semmit az égvilágom. A szokványos fizikán belül maradván az sem zárható ki, hogy Isten észrevétlenül az asztal alá csempészte az összes vízmolekulát és ott szépen megkeverte őket. Az ilyen szabálytalan, kiszámíthatatlan dinamika számos hétköznapi

jelenségben megfigyelhető még, gondoljunk például hulló falevelek libegő esésére. Bármennyi ideig követjük is az ilyen mozgást, nem tudjuk megbecsülni, hogy miként folytatódik. Ez éles ellentétben áll az életünk ritmusát megadó (s az élet kialakulásához oly fontos) szigorú szabályossággal, a periodikus dinamikával, mely a Föld Nap körüli, vagy a Hold Föld körüli mozgására jellemző.

Ha hagyományos neveltetésű fizikusok bonyolult eredményeket észleltek, rögtön bonyolult okokat kerestek. Ha véletlenszerű összefüggést láttak egy rendszer bemenete és kimenete között, akkor mindjárt azt gondolták, hogy véletlenszerűséget - mesterséges zajt vagy hibát - kell beépíteniük bármely épkezlábnak szánt elméletbe. Pedig a káosz lényege matematikailag megragadható, igaz, hogy a bemenetnél még egészen elenyésző, apró eltérések óriási különbségekké nőhetnek a kimenetig.

A már említett nonlinearis rendszereknél, megadható egy egyszerű feltétel, mely a bonyolult mozgás létrejöttéhez szükséges. Lineáris rendszerekben azonban következmények arányosak a kiváltó okkal, így ezekben nem alakul ki a kaotikus viselkedés. Még akkor sem, ha a következmény nem egyenesen arányos a kiváltó okával, hanem annak valamilyen bonyolultabb függvénye. A rugóban ébredő erő pl. arányos a megnyúlással, ha az kicsi, de nagyobb megnyúlás esetén az egyenes arányosnál gyorsabban nő. A káosz tehát csak a nemlineáris rendszerek időbeli viselkedése. Mivel szinte minden rendszer ilyen, a káosz megjelenése tipikus. Ezen azt értjük, hogy a kaotikus viselkedés lehetősége minden nemlineáris rendszerben megvan. Az azonban, hogy ténylegesen megvalósul-e, a rendszer konkrét tulajdonságaitól és kezdeti helyzetétől is függ.

Az előrejelezhetőség elvesztése

A kaotikus mozgás részletesebb megfigyelése egy alapvetően új tulajdonságot tár fel, a határozatlanság felerősödését. A bonyolult rendszerek egyik legalapvetőbb tulajdonsága az, hogy viselkedésük pontos

előrejelzése lehetetlen. Ezt a kiszámíthatatlanságot Lorenz; "kezdeti feltételekre való érzékenységnek" nevezte el, és a pillangó-effektus is ennek egy megfogalmazása. A fogalom azt jelenti, hogy egy kellően bonyolult, nemlineáris rendszerben a kezdő állapotban végtelenül kis változás is óriási változásokat idéz elő a rendszer kimenetén. Nevét a pillangó időjárásra gyakorolt hatásáról kapta. Mint fentebb már említettem ahhoz, hogy az időjárást pontosan előre tudjuk jelezni, akkor rendelkezünk kéne a földünk pontos másolatával. Tehát ha elmulasztunk számításba venni akár egyetlen pillangó szárnycsapását is egy távoli földrészen, akkor talán már nem tudjuk pontosan előre jelezni azt a vihart, ami esetleg pár hét múlva otthonunkon söpör végig és kialakulásában szerepet játszott az említett pillangó.

Hiába igyekezünk két azonos falevelet azonos helyzetből leejteni, mozgásuk rövid idő után különböző lesz. Ha a jelen állapot megadásában való apró pontatlanság következményei időben gyorsan növekednek, akkor a mozgás gyakorlatilag megjósolhatatlan. A kaotikus mozgás nem jelezhető előre. Ezzel minden olyan tudományban, ahol káosz előfordulhat, megjelenik az előrejelezhetőség problémája. A túlzott érzékenység miatt lehetetlen olyan modellt készíteni, ami pontosan leírja az ilyen a rendszerek a kimenetelét. A meteorológiában ez eddig is természetes volt, hiszen mindig várható még szélsőségesebb viselkedés, időjárási csúcsok megdöntése. Egy hosszú távon pontosan előre jelezhető nem bonyolult rendszerben természetesen nem ez a helyzet.

A határozatlanság felerősödése rokon azzal a jelenséggel, amit instabilitásnak nevezünk. Az instabilitás azonban előfordul úgy is, hogy mozgások kivételes helyzeteit jellemzi csak. Ilyen például a hegyére állított ceruza helyzete, hiszen feldőlésének iránya leheletnyi finom hatásokon múlik. A mozgás további folyamán azonban az irány már nem változhat, instabilitás többé nem lép föl. Ezzel szemben a kaotikus mozgás során végig instabil állapotok között mozog a test. A káosz állandósult instabilitás. Végző soron ez a dinamikai instabilitás az előrejelezhetetlenség

alapja. Mivel a kiinduló helyzetbeli kis bizonytalanság mérési hibának is tekinthető (egy test helyét hétköznapi eszközökkel nem tudjuk tizedmilliméternél pontosabban meghatározni), azt mondhatjuk, hogy a kaotikus mozgás hibaerősítő. A természettudományban ez új helyzetet teremt, hiszen korábban mindenki feltette, hogy a kis kezdeti hibák kicsik is maradnak, éppen ezért az volt az általánosan elfogadott álláspont, hogy a világmindenséget mozgató, viszonylag egyszerű törvények, előrejelezhető viselkedést idéznek elő az univerzumban, még akkor is, ha nem mindet ismerik pontosan. Gondolták, ha egy rendszernek ismerjük a törvényeit, paramétereit, akkor minden esetben előre tudjuk jelezni a viselkedését. A tudósok sajnálatára ennek a hibás elméletnek volt még két gyakorlati akadálya is.

Az első akadály a rendszer rendkívüli bonyolultsága. Mivel lehetetlen a mindenség minden egyes részének ismerni a sebességét, tömegét, a rá ható nehézségi erőket, stb. ezért bármínemű előrejelzése inkább csak közelítés lett volna. A teljes rendszer leírásának másik akadálya; az összes kezdő feltétel pontos ismeretének hiánya. A meglévő eszközökkel csak nagyon kis részét tudjuk mérni világunknak, a figyelmen kívül hagyott részek pedig – a kezdő feltételekre való nagyfokú érzékenység miatt – előrejelezhetetlen változásokat keltenek a rendszerben.

A rend: pontos geometriai szerkezet

Sokan hiszik azt, hogy a káosz elmélet a rendezetlenség elmélete. Éppen ellenkezőleg. Az univerzum nem mutat kaotikusságra utaló nyomokat, ha elég nagy részleteit, vagy éppen elég kicsi részleteit nézzük.

A testünk nagyon bonyolult, mégis az egész a hihetetlenül egyszerű DNS-be van kódolva. És a mi világunk is ehhez hasonló; látszólag rendkívül bonyolult de a törvények melyek mozgatják talán nagyon egyszerűek. A fraktálok első pillantásra hihetetlenül bonyolultnak tűnnek, de az algoritmus, ami generálja őket viszonylag egyszerű. Semmi sem véletlen világunkban, minden determinisztikus. A bonyolultság az egyszerűségből

származik és az egyszerűség a rendnek a lelke. A rend a rendszer velejárója, csak néha egy kicsit nehéz megtalálni. A kaotikus rendszerek se nem véletlenszerűek, se nem rendezetlenek.

A káoszban rend és alak van. A kaotikus mozgáshoz határozott geometriai szerkezet tartozik. A hiba fölerősödése ugyanis nem igaz minden kiinduló állapotra, ill. mindenfajta állandósult mozgásra. A részletes megfigyelés azt mutatja, hogy az előrejelezhetetlenség a mozgásnak csak egyértelműen meghatározott tartományain belül áll fenn. Ezen tartományokon kívül a mozgás periodikus, vagy közelítőleg az, tehát olyan, mint amit hagyományosan megszoktunk. A kaotikus és nem kaotikus tartományok elrendeződéséről szabad szemmel általában nem szerezhethetünk tudomást. Ahhoz, hogy a mozgás geometriájáról áttekintést kapjunk, egyfajta képszerű ábrázolást kell végrehajtanunk, egy mesterséges teret, az ún. állapotteret vagy fázisteret kell megalkotnunk, s a mozgást abban követnünk. Ez egyszerűen megtehető úgy, hogy a mozgás különböző jellemzőit ábrázoljuk egy koordináta-rendszer különböző tengelyein bármelyik időpillanatban. A legegyszerűbb eset az, amikor pl. a kitérést és a sebességet ábrázoljuk a sík vízszintes és függőleges tengelyén. Általában azt látjuk, hogy a mozgás követése során, az állapottéren egy érdekesen bonyolult alakzat rajzolódik ki. A mindenkor jelen levő súrlódás miatt ez leggyakrabban a hosszú idő után beálló kaotikus mozgás képe. Ezt az alakzatot, mivel vonzó halmazként jelenik meg a fázistérben, kaotikus attraktornak nevezzük. Súrlódásos esetben az előrejelezhetetlenség a kaotikus attraktoron érvényes. A mozgás tehát itt véletlenszerű. Az ezt megelőző mozgás azonban nem az! Egyáltalán nem véletlen, hanem biztos, hogy a kaotikus attraktorra elegendő hosszú idő után rákerülünk. Ez a meghatározottság egyik fontos megnyilvánulása.

Az attraktornak, noha bonyolult alakzat, nincsen térfogata. A nulla térfogatú, de véges kiterjedésű és ezért bonyolult elrendezésű pontthalmazokat fraktáloknak nevezzük. A fraktálok olyan alakzatok, melyek minden részletükben a fraktál egészéhez hasonlóak. A kaotikus

mozgás kapcsolata a fraktálokkal azt mutatja, hogy a periodikus mozgástól való eltérés minden léptékben jelen van. Az attraktor egyértelmű geometriai szerkezete is a mozgás determinisztikusságának következménye. A káosz időbeli kiszámíthatatlanság és állapotterbeli rend egyszerre történő megjelenése. A mozgás és a szerkezet (dinamika és geometria) egysége világosan mutatja, hogy a determinisztikus káosz nem zaj (nem molekuláris káosz)!

Az egyetlen olyan jelenség, amelyben szabad szemmel is láthatóak a kaotikus mozgással kapcsolatos fraktál struktúrák, az a folyadékbeli keveredés dinamikája, pl. szennyeződés szétterjedése egy áramlásban. Ebben az esetben ugyanis az állapotter éppen egybeesik a fizikai térrel. Ezért a keveredés az egyetlen példa olyan kaotikus mozgásra, amelyben mindhárom alapvető tulajdonság hétköznapi módszerekkel is egyszerűen megfigyelhető. A keveredés kaotikussága kapcsolatos az egyik általános természettörvény, az idő kitüntetett iránya, a megfordíthatatlanság, az irreverzibilitás kérdésével. Hiába keverjük ugyanis a tejszín a kávéban adott irányban egy ideig, ha a keverést megfordítjuk, vagyis az eredeti keverő mozdulatokat időben visszafelé végezzük el, a tejszín nem veszi fel a beöntéskor megfigyelt alakját. Tovább oszlik szét a kávéban. Ennek oka az, hogy - noha az elvi determinizmus miatt súrlódásmentes esetben az eredeti alaknak vissza kellett volna állnia - kezünk nem irányítható végtelenül pontosan, s így lehetetlen, hogy a megfordított keverés annyira pontos mása legyen az eredetinek, hogy az egész fraktál tejszín-alakzatot a kiindulásiba vigye át. Végző soron tehát mondhatjuk, hogy az irreverzibilitás a káosz következménye. Ez a determinizmus gyakorlati hiányának, s a hibák felerősödésének egy másik megnyilvánulása. A keveredés esetén kívül, a valódi térben fellépő fraktálstruktúrák (pl. a hegy, a fa, a karfiol alakja, a Hold felszíne) ugyan valamilyen lassú növekedési folyamat végtermékei, de közvetlenül nem kapcsolatosak mozgással. A környezetünkben fellépő fraktálok tehát általában nem kaotikus mozgás eredményei (még akkor sem, ha bizonyos matematikai iterációk kaotikus

attraktorain az ugráló pont meglepően pontos mását rajzolja ki pl. egy levélnek). Az viszont mindig igaz, hogy a kaotikus mozgás mindig fraktálszerkezetekkel kapcsolatos, mely a képszerű ábrázoláshoz használt állapot térben jelenik meg. Dolgozatomban a káosz kimutatására kifejlesztett matematikai eljárásokat nem mutatom be, azonban ha egy adatsorról azt állítjuk, hogy kaotikus, akkor e kijelentés mögött mindig részletes matematikai analízis áll.

4. Amit a káoszról még tudni kell

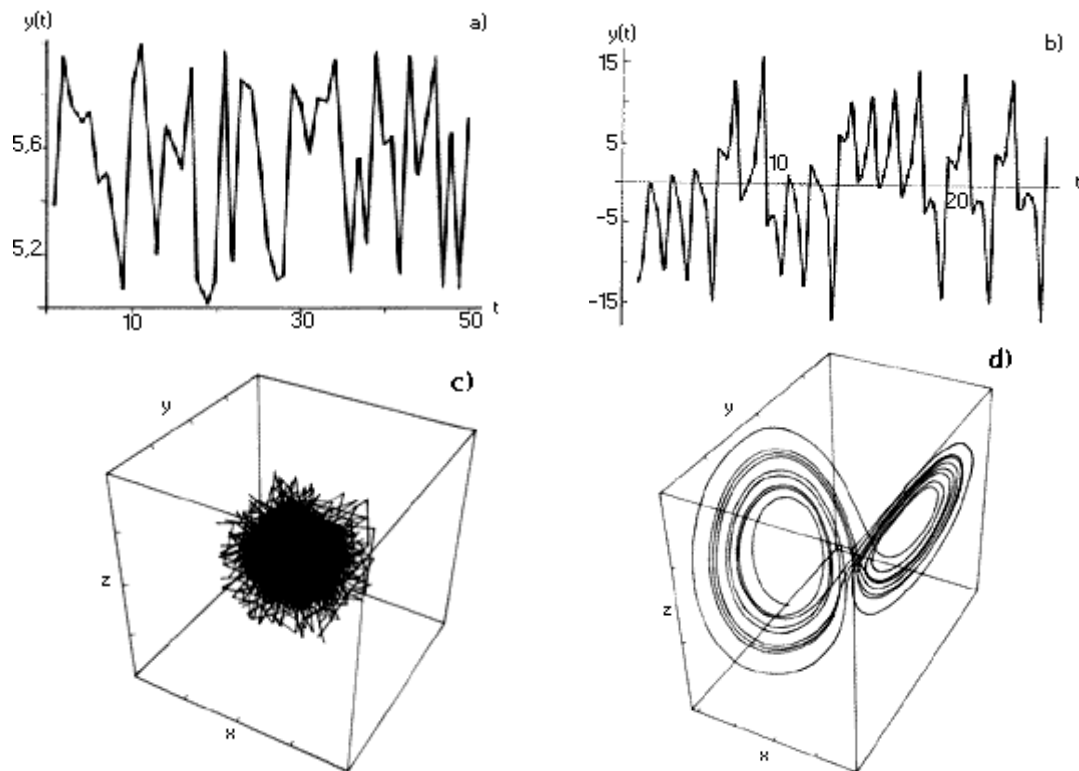
A zaj és a káosz

Az eddigieket összefoglalva tehát a káosz olyan megjósolhatatlan mozgás, ami determinisztikus, azaz a körülmények által egyértelműen megszabott. A megjósolhatatlanság itt gyakorlati szempontból értendő: minden, tetszőlegesen kicsi kezdeti bizonytalanság a mérendő mennyiséggel azonos nagyságúra, sőt nagyobbra felerősödhet, s így a hiba több mint 100%-os lehet. Ugyanakkor a mozgás elvi szempontból determinisztikus (amit bizonyít a törvények [egyenletek] jellege is), azaz végtelenül pontos kezdeti adatok esetén a mozgás tetszőlegesen pontosan előre jelezhető lenne. A bonyodalmat az okozza, hogy az ilyen végtelenül pontos kezdeti meghatározás irreális absztrakció, s ennek lehető legjobb gyakorlati megvalósításai is drasztikusan különböző végkifejletre vezetnek. Mivel a kezdeti állapotból tökéletesen soha sem ismert, a rendszer véletlenszerű, kaotikus viselkedést mutat. Példaként gondoljunk arra, hogy hogyan dől el a már említett, hegyére állított ceruza. Ha a ceruza kezdeti helyzetét egy kicsit is megváltoztatjuk, akkor az egészen más helyen fog földet érni, mint eredetileg, mozgását tehát nem tudjuk megjósolni. Ebben a mechanikai rendszerben csak ez az egy kezdeti állapot ilyen különleges tulajdonságú, és csak a mozgás egy véges időtartamára igaz, hogy a közeli pályák gyorsan távolodnak egymástól. A véletlenszerű viselkedést mutató

kaotikus rendszerekben minden, vagy legalábbis végtelen sok kezdeti állapot esetén és a mozgás egész időtartamára igaz az, hogy a kezdetben közeli pályák gyorsan távolodnak egymástól. Kérdés azonban, hogyan ismerhető fel a kaotikusság és hogyan különíthető el a belső dinamikai bonyolultság a rendszeren a kívülről jövő, sokváltozós "zajtól".

Amikor zaj kerül a rendszerbe, tőlünk függetlenül, vagy akár mesterségesen keltjük, akkor a rendszer leírására szolgáló grafikon pontjai már nem mindig lesznek előre meghatározhatók, elveszti a rendszer a linearitását. Volt egy időszak, amikor a grafikus modell egyetlen viselkedéséből a káosz megnyilvánulására következtettek. Azóta már kiderült hogy a kettő nem ugyanaz. A zaj a sokváltozós és sok résztvevős rendszerek sajátossága, a káosz pedig éppen azoknak az egyszerű törvények által irányított rendszerek sajátossága, amelyek a kevés összetevő ellenére is bonyolultan viselkednek. Lehet persze bonyolult egy sokrészesecske-rendszer mozgása is, de az, hogy ilyen összetett rendszer mozgása bonyolult, nem meglepő. Ez utóbbi kifejezésére ezért a molekuláris káosz szóhasználat terjedt el, ami gyakran szinonimája a zajnak. A legegyszerűbb példa a zajra egy pollenszem mikroszkóp alatt jól megfigyelhető összevissza bolyongása (a Brown-mozgás), ami számtalan folyadékrészecske lökdösésének a következménye. Az általunk használt káosz fogalmat pedig a determinisztikus jelző illeti meg, ugyanis a körülmények és törvények által egyértelműen meghatározott. Ezzel arra is utalok, hogy külső zaj a jelenségben nem játszik szerepet, a bonyolult viselkedés a dinamika belső sajátossága.

A zaj markánsan megkülönböztethető a káosztól, ha a rendszer változóinak terében, a már említett fázistérben vizsgáljuk a mozgást. (Például, ha egy biokémiai folyamatban három anyag: x , y és z koncentrációját mérjük, akkor az x , y , z változók terében a rendszer állapota egy időpillanatban egyetlen pont lesz. A folyamat során ez a pont fog vándorolni az x , y , z által meghatározott fázistérben.) Ahogy azt a 1. ábra szemlélteti, a zajos rendszer a fázistérben egy szétkent pacni lesz, míg a



2. ábra. A kaotikus és a sokváltozós véletlenszerű, rendszer tulajdonságai. Míg az egyes dinamikai változók mind a véletlenszerű (a), mind a kaotikus rendszerben (b) rendszertelenül változnak, addig a mozgás változóinak terében (itt x, y, z -vel jelölve) a kaotikus rendszer egy jellegzetes "valamin", a kaotikus attraktoron (c), a véletlenszerű pedig egy elkent felhőn mozog (d). Ebben a példában a Lorenz-egyenletek különös attraktora látható.

kaotikus rendszer egy sajátos "valamin", a kaotikus attraktoron fog mozogni. Sajnos a gyakorlatban nem ilyen szembeötlő a különbség, mert a kaotikus vagy periodikus rendszerből származó adatok más külső zajokkal terheltek, így sokszor igen nehéz lehámozni a kevés változós, determinisztikus hatást a külső sokváltozós zajról. A fentiekből az is következik, hogy olyan jelenségek kapcsán nem beszélhetünk determinisztikus káoszról, melyek mögött bonyolult törvények állnak, vagy melyekben esetleg nem is tudjuk biztosan, hogy a törvények matematikai formába önthetőek-e (pl. a történelem esetén). Másrészt viszont vannak olyan matematikai struktúrák, amelyek kaotikus dinamikát produkálnak a számítógép képernyőjén (pl. a Julia-halmazokra vezető ismételt műveletek, iterációk, s a velük kapcsolatos Mandelbrot-halmaz), de biztosan tudható, hogy természeti jelenséget nem modellezhetnek, mert az időben fordított

irányú mozgás állapot-meghatározása nem egyértelmű. Az egyértelműségnek pedig valós természeti folyamatokra fenn kell állnia.

Foglaljuk össze az eddig elmondottakat figyelembevétel a kaotikus rendszerek tulajdonságait:

A kaotikus rendszerek determinisztikusak. Ez azt jelenti, hogy van néhány meghatározó egyenlet, ami irányítja a rendszert, és ezek a törvények meghatározzák a rendszer állapotait minden időpillanatban.

A kaotikus rendszerek érzékenyek a kezdeti feltételekre. Akár nagyon csekély változtatás is a kezdeti állapotban aránytalanul nagy különbségeket okoz a rendszer későbbi állapotaiban.

A kaotikus rendszerek se nem véletlenszerűek, se nem rendezetlenek. Valójában a véletlen rendszerek nem kaotikusak, a káoszban rend és alak van.

A valószínűségi leírásról

A kaotikus rendszerekben a hibák rövid idő alatt ugyanakkorára nőnek, mint maguk a mérendő mennyiségek, akkor e rövid kezdeti idő után a mozgás véletlenszerűnek tűnik. Ezért a szokásos mozgáskövetési módszerek nem használhatók! Ebben a vonatkozásban tehát a káosz, hasonlónak válik a zajhoz. Ezért egyetlen mozgás pontos megfigyelése helyett érdemes mozgássokaságot vizsgálni: át kell térni valószínűségi leírásra.

Abban a tartományban tehát, ahol a kiinduló helyzetre való érzékenység fennáll, a mozgás helyes előrejelzése annyit jelent, hogy megadjuk, adott idő után, milyen valószínűséggel lesz adott helyen a test. Meglepő, de igaz, hogy ezzel a statisztikus szemlélet óhatatlanul bekerül, pl. a mechanika

eszköztárába is, ahol pedig Newton óta úgy tűnt, rá nem lesz sohasem szükség. Fontos hangsúlyozni, hogy a valószínűségi leírás nem jelent bizonytalanságot, indeterminizmust. Sőt, az egyedi mozgásokkal szemben, a valószínűségek időfejlődése előre jelezhető. E leírással is nagyon pontos kijelentések tehetők, az átlagértékek például egzaktul megadhatók. A valószínűségi leírás elkerülhetetlensége a húszas évek óta nyilvánvaló a mikrorészecskék világában. A szokatlansága ellenére a valószínűségi módszer éppoly hatékony, mint a hagyományos, s elvezetett olyan alapvető új felfedezésekre, mint a tranzisztor, a mikrochip, a lézer vagy a szupravezetés.

3. A káosz elmélet napjainkban

A káosz elmélet inerdiszciplináris tudomány

A mindennapokban megismert dolgok, például a folyadékok, gázok és mechanikai rendszerek annyira alapvetőnek és közönségesnek látszottak a káoszelmélet megszületése előtt, hogy a fizikusok már-már úgy vélhették, hogy behatóan ismerik és értik is őket. Holott nem így állt a dolog. A hetvenes évek elején azonban néhányan kezdtek közelebb férkőzni a rendhagyó esetekhez. A kutatók - matematikusok, fizikusok, biológusok, vegyészek - mindannyian a szabálytalanság különböző fajtái között kerestek hasonlóságot, és közvetlen kapcsolatot tártak fel a felhők alakja, a villámlás nyomvonala, a vérerek mikroszkopikus összefonódása, a csillagok galaktikus tömörülése és a tőzsdei árfolyam-ingadozások között. Így, lassan egy egész tudomány fejlődött ki a kaotikus jelenségekből, mely a már ismert törvények, addig el sem képzelt bonyolultságú megnyilvánulását ismerte fel.

A káosz áttöri a tudományágak határait, s a rendszerek általános természetének tudománya lévén, közelebb hozza egymáshoz a korábban szigorúan elkülönült területek kutatóit. A káosz kutatása olyan kérdéseket

vet fel, amelyek meghaladják a tudomány szokásos munkamódszereinek teljesítőképességét. A káosz tudománya sokat mondó kijelentéseket tesz a komplexitás egyetemes (azaz a legkülönbébb esetekben megnyilatkozó) természetéről. Joggal állapíthatjuk meg, hogy a káosz tudományának művelői, eltérítették a tudományt redukcionista törekvésétől: attól, hogy a rendszereket csupán alkotórészeiken - kvarkokon, kromoszómákon vagy neuronokon - keresztül tanulmányozzák. Ők az egészet keresik. A káosz forradalma közvetlenül érinti a látható és tapintható, emberi léptékű dolgok világát.

A káosz ott kezdődik el, ahol a klasszikus értelemben vett tudománynak vége van. A káosz elmélet egy új, kibontakozásban lévő, tudomány, amelynek határai még nem teljesen tisztázottak. Mint láttuk, a valósághoz talán közelebbi, és találóbb elnevezés lenne, a komplexitás elmélet, vagy bonyolult rendszerek elmélete, de dolgozatomban maradtam a káosz elmélet elnevezésnél, amely szélesebb körben elterjedt és elfogadottabb.

Nagyon sokan úgy gondolják, hogy a XX. század három legnagyobb eredménye - amelyek miatt igazán emlékezetes marad e század- a kvantum mechanika, a relativitáselmélet és a káosz elmélet. Ezek közül a káosz elmélet a legátfogóbb, szinte az összes tudomány számára vannak hasznosítható felismerései.

Úgy, mint a fizika, a káosz elmélet is alapokat nyújt más tudományágakban. Valójában a káosz elmélettel megvetette a lábát a nonlinearis dinamika a tudományokban.

A káosz elmélet matematikai felhasználása 100 évvel ezelőtt kezdett fejlődni, és egy francia matematikus, Henre Poincare nevéhez fűződik. Poincaré már a múlt század végén tudta, hogy a bolygók rendkívül bonyolult pályákon is mozoghatnak, de ezt sokáig matematikai kurióznak tekintették. A hetvenes években azután, a meteorológiai jelenségek előre jelezhetősége mellett, bizonyos állatfajok évi populációszámának szabálytalan ingadozása - pl. a sáskajárás - volt az egyik fontos vonal, mely a káosztudomány kialakulásához vezetett. A fraktál

matematika, azóta már jelentős eredményeket ért el a számítógépes adattömörítésben.

A biológiában, a fejlődési folyamat és genetikai algoritmus megértéséhez, a mesterséges élet szimulációknál, szervezetünk folyamatainak megértéséhez használható, hiszen a biológiai folyamatok döntő többségét a nemlineáris kapcsolatok határozzák meg. Ennek alapján számos biológiai rendszer viselkedhet kaotikusan. Alkalmazzák még továbbá agyunk folyamatainak megértéséhez és más eszközökkel kutathatatlan területek, mint például a tudat és a gondolkodás működésének vizsgálatnál. A káosz elmélet tükrében Charles Darwin evolúciós elméletének is újabb értelmezéseket adhatunk.

A fizikában, és azon belül a termodinamikában a turbulencia megértéséhez, az önszerveződő rendszerek vizsgálatánál használják a káosz elmélet eredményeit. Sokan úgy tartják, hogy egy rendszer entrópiája szorosan összefügg az adott fizikai rendszer fejlettségével. Minél nagyobb az entrópia egy rendszerben annál fejlettebb a rendszer.

A káosz elméletnek nagy hatása van a kvantum fizikára is. Megpróbálja összeegyeztetni a kvantum fizika káoszáét és a Newtoni világkép kiszámíthatóságát. Továbbá olyan megválaszolhatatlan kérdésekre ad választ a kozmológia területéről, amelyek eddig megoldhatatlannak tűntek.

A közgazdaságtanban, előrejelző algoritmusokat alkalmaznak gazdasági kutatásokban, tőzsdei előrejelzéseknél. Mérnöki felhasználásban is szerepet kapott, pl. termék design kialakításában. Ebené úttörő szerepet vállalt a DuPont és Deere vállalat.

A káosz tudományos alkalmazása mellett, játékipari felhasználása is jelentős. Számítógépes játékok egész sorát készítettek a káosz kutatás eredményeinek felhasználásával, lásd SimAnt, Simlife, SimCity, stb. Ahogy a káosz forradalma halad előre, a fizikusok legjobbjai egymás után ismerik fel, hogy minden zavar nélkül visszakerültek az emberi mértékekhez. Nem galaxisokat tanulmányoznak, hanem felhőket. Eredményes számítógépes kutatásokat végeznek nem Crayeken, hanem

Macintoshokon. A vezető folyóiratok a kvantumfizikai cikkek tözsomszédságában tanulmányokat közölnek az asztalon pattogó golyó különös dinamikájáról. Most mintha a legegyszerűbb rendszerek okoznák a legnagyobb fejtörést az előrejelezhetőség dolgában. Ráadásul ezekben a rendszerekben - a káosszal karöltve - magától feltűnik a rend. Csak egy újfajta tudománytól várható, hogy áthidalja a szakadékot, amely az egyes dolgok - egyetlen vízmolekula, a szív szövetének egyetlen sejtje, egy magában álló idegsejt - viselkedéséről megszerzett ismereteket elválasztja azoktól, amelyeket milliányi ugyanilyen dolog együttes viselkedéséről gyűjtöttünk össze.

Úgy tűnik, hogy mind a biológiai, mind a technikai evolúció főleg a periodikus viselkedésnek megfelelő paramétereket választotta ki, s ezért élhattünk sokáig abban a tévhitben, hogy nincs lényegesen különböző másik mozgásforma.

Nos, nagyon sok természettudományos törvény differenciálegyenletek segítségével van leírva. Így tehát rengeteg kaotikus rendszer (mint például az időjárás) ugyan leírható fizikai törvényekkel differenciálegyenletek formájában, ám azok meg nem oldhatók, hogy a fázisdiagram vonala védve legyen. A jövőt megjósolni nem vagyunk képesek.

5. Gyakorlatban

Bevezetés a gyakorlati részhez

A számítógépek fejlődésével lehetőség nyílt egyes kaotikus jelenségek modellezésére. Ebben a részben egy konkrét kaotikus rendszer – egy állat populáció -, modellezésének folyamatát mutatom be. Azért választottam éppen ezt, mert egy populáció egyedszámának a változásait leíró logisztikus leképezés az élet egyéb területeinek modellezésére is alkalmas. Lehetséges ez mindazért, mert maga az élet, és annak területei dinamikai rendszerként

viselkednek. Gondolok pl. a társadalomra, az ipari termelésre, a tőzsdei árfolyam-ingadozásokra.

A számítógépes modellezést megelőzi a 1. A modellezendő rendszer pontos megfigyelése, 2. Matematikai modell készítése (egyenletek felírása), 3. Kódolás. Mivel jelen esetben az első két lépést már adott, én a fő hangsúlyt az algoritmus bemutatására helyezném.

Populáció-dinamika

Válasszunk ki egy állatfajt és egy élőhelyet. A faj itt élő egyedeinek összessége a populáció. A populáció-dinamika arra keres választ, hogyan változik a faj egyedeinek száma az időben. Nézzük meg, hogy milyen modellt állíthatunk fel, amely segítséget nyújt majd ezen kérdés megválaszolásához. Világos, hogy ez sok tényező bonyolult kölcsönhatásának eredménye (pl. környezeti feltételek [táplálék, élettér, klíma,...], kölcsönhatás más fajokkal [ragadozók,...], koreloszlás, termékenység,...).

Tekintsük, az életet, és azon belül a populációkat dinamikai rendszerekként, és a matematikai fizika elemeit használjuk ezek változásainak leírására. Mivel a matematikai leírást mindenképpen össze kell vetni a valódi rendszerekkel, ezért kénytelenek vagyunk bizonyos egyszerűsítésekhez folyamodni. Az egyik fontos egyszerűsítés az, hogy a világot diszkrét időintervallumokra osztva kell modellezni. A differenciálegyenletek időben simán változó folyamatokat írnak le, de nehéz őket megoldani. Az egyik állapotból a másikba ugró folyamatokra egyszerűbb egyenletek – „differencia-egyenletek” – alkalmazhatók. Szerencsés helyzetben vagyunk, hiszen az egyéves intervallumok, az évről évre történő változások, számos állati populációban fontosabbak, mint a folytonos változások.

Ökológiai tanulmányok nélkül is, feltételezhetjük, hogy egy populáció következő évi népessége (x) valamilyen függvénye (F) az ez évi népességnek: $x_{\text{köv}} = F(x)$. Az ilyen egyszerű modellekben az egyedszámok évenkénti alakulását követni nem más, mint venni egy kiindulási számot és

ugyanazt a függvényt ismételten alkalmazni rá. A népesség egész története megragadható ezzel a függvény-ismételgetéssel avagy visszacsatolással: azzal, hogy a mindenkori kimeneti érték bemenetül szolgál a következő évhez.

De vajon melyik ez a függvény, amelyik segítségével kiszámolhatjuk a következő évi egyedszámot. Sok különböző típusú függvény lehetséges. A legegyszerűbb talán az, amely évről évre egy bizonyos százalékkal növeli a népességet: $x_{k\ddot{o}v} = ax$. (Az a paraméter a népesség növekedési arányát adja meg.) Ezt a fajta megközelítést vallotta Malthus is, aki már 1798 –ban „teljes bizonyossággal” állította, hogy ha semmi sem gátolja (sem táplálékszerzési nehézségek, sem erkölcsi megfontolások), a népesség huszonöt évenként megduplázódik. Az $x_{k\ddot{o}v} = ax$ képlet volt az első kísérlete nem csak a populácók, hanem más dinamikus rendszereket definiáló leképezések specifikálásának is. Ez volt az úgynevezett „exponenciális-növekedési modell”.

Ha megnézzük a $x_{k\ddot{o}v} = ax$ képletet, hamar rájövünk, hogy ha a növekedési együttható nagyobb mint 1, akkor az egyedszám exponenciálisan a végtelenségig fog nőni. Tudjuk, hogy ez a valóságban nem történhet meg. A valóságban a dinamikai rendszerek korlátosak. Annak elismerése, hogy a növekedésnek korlátai vannak, messzemenő következményekkel jár. Ha a növekedés nem teljesen, vagy legalábbis egy bizonyos szint után már nem egészen exponenciális, akkor a sima exponenciális leképezésről sem gondolhatjuk, hogy kellő pontossággal adja meg a kérdéses dinamikus rendszert.

Korlátozott lehet a növekedés, ha valamely populáció egyedei jól körülhatárolt térben kénytelenek szaporodni. Erre jó példát szolgáltat a Petri-csészében elhelyezett baktériumtenyészet vagy a palackba telepített gyümölcslevegő-kolónia. Ésszerű feltételezésnek tűnik, hogy a kezdeti, még szinte korlátlan mennyiségű tápanyagon a baktériumok az exponenciálishoz közel eső módon szaporodjanak, míg később a rohamosan apadó

élelmiszertartalékok elkerülhetetlenül a növekedési ütem lassulásához vezetnek.

Miután az exponenciális folyamatokat állandó növekedési ütemek jellemzik, korrekciójukként legkézenfekvőbb egy olyan folyamatot elgondolnunk, melynek növekedése fokozatosan, még mielőtt abszurd viszonyokba torkollana, folyamatosan lelassul. S ez lehet az a helyzet, melyben az exponenciális függvény lassan átadja a helyét egy, a telítődési szinthez szépen odasimuló görbének, az úgynevezett logisztikus növekedésnek. Magyarul a korlátlan növekedés elkerülése érdekében még egy tagot be kell iktatnunk az exponenciális-növekedést produkáló egyenletünkbe, amely tag majd korlátozza a növekedést, ha az egyedszám már nagygyá válik. A választandó függvényünknek tehát meredeken kell emelkednie, míg a népesség kicsi, közepes értéken szinte nullának kell lenni a növekedésnek, és le kell törnie, ha a népesség nagyon nagy. Vajon melyik ez a függvény?

Szerencsére semmi újat nem kell kitalálnunk. Thomas R. Malthus modelljét elemezve a belga P. F. Verhulst már 1844-ben egy egyszerű korrigált formát javasolt. Tudjuk, valamely populáció egyedszámának exponenciális növekedése az $x_t = ax_{t-1}$ vagy ami ugyanaz, az $x_t / x_{t-1} = a$ formulával adható meg. Ennek korrekciójához a zabolátlan exponenciális helyett korlátozott növekedési folyamatot kell feltételeznünk, aminek jó modellje lehet a már említett baktériumok szaporodása egy zárt rendszerben. Kézenfekvő azt feltételeznünk, hogy a baktériumok száma két egymást kiegészítő folyamat eredőjeként alakul. Miután nyilván érvényesül a baktérium szül baktériumot szabály, létezik egy exponenciális összetevő, amely elsősorban a folyamat kezdetén játszhat döntő szerepet. A növekedés azonban bizonyára aszerint lassul, hogy milyen mértékben fogy a rendelkezésre álló tápanyag mennyisége, vagy ami ugyanaz, meddig jutott a baktériumok terjedése, mennyi lett a számuk. A növekedési ütem ezért x_{t-1} valamilyen $f(x_{t-1})$ függvényével csökkenhet. A módosított modell tehát

$$x_t / x_{t-1} = a - f(x_{t-1})$$

alakú lehet, ahol most már csak az f függvényt kell pontosan megadnunk. Ezirányú tudatlanságunkat készséggel elismerve legegyszerűbb természetesen x_{t-1} valamilyen lineáris függvényét választanunk. Mivel ezekről sem tudunk semmit, maradjunk mind közül a legegyszerűbb $f(x_{t-1}) = ax_{t-1}$ választásánál, amelyet aztán a fenti képletbe helyettesítve

$$x_t / x_{t-1} = a - ax_{t-1},$$

ebből pedig átrendezés és beszorzás után

$$x_t = ax_{t-1}(1-x_{t-1})$$

kifejezés adódik, s végül is ez lesz az a formula, melyet a továbbiakban a logisztikus növekedés modelljeként tárgyalunk. Az algoritmikus gondolkodás megköveteli a képlet kisebbfajta átalakítását a következő módon:

$$X(n+1) = A * X(n) * [1 - X(n)]$$

A paraméterek a következők:

X(0) : A populáció induló mérete.

X(n) : A populáció mérete az N -ik időszakban.

A : a populációra jellemző növekedési együttható.

A matematikai modellben az egyszerűség kedvéért a populáció maximális mérete 1 (amikor az élettér telítve van), és kihaltnak tekintjük a populációt, ha a mérete 0. Ebből következik, hogy $0 \leq X(n) \leq 1$

Feladat: Ábrázoljuk egy koordináta-rendszerben egy tetszőleges paraméterű logisztikus leképezést. Az x tengelyen jelöljük az időszakokat, az y tengelyen a az időszakra jellemző egyedszámot.

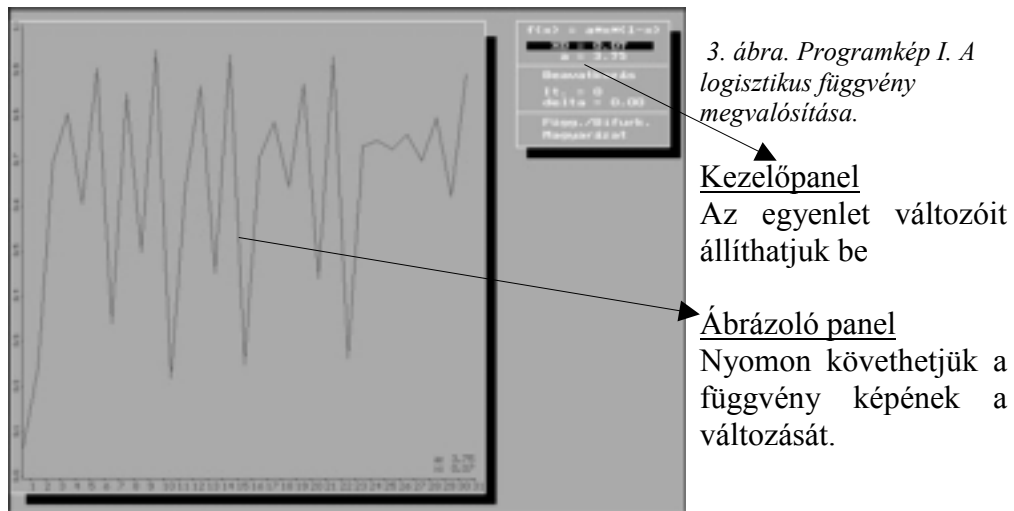
A logisztikus leképezés számítógépes megvalósítása Pascal nyelven:

A probléma megoldásához egyetlen ciklusra van szükségünk. A ciklus annyiszor hajtódjon végre, ahány időszak egyedszámára vagyunk kíváncsiak. A ciklusban K_i kell számolni az adott időszakra jellemző egyedszámot a már megadott képlettel, az előző időszak egyedszámából. Ezt át kell konvertálni egy grafikusán ábrázolható értékre. És a könnyebb értelmezhetőség kedvéért ne csak diszkrét pontokat ábrázoljunk, hanem kössük is őket össze; az előző időszaknak megfelelő – eltárolt - pontból húzzunk egyenest a most kiszámolt ponthoz. És tároljuk el az aktuális pont grafikus koordinátáit. Ezt ismételjük annyiszor ahányszor szükséges.

```

xt := 0.05;                                {az egyedszám kezdetben legyen 0,05}
koz := 435 div 31;                          { az x tengely egységei közti távolság
                                                kiszámítása, pixelben}
elozox := 0;                                { kezdeti egyedszám vízszintes koordinátája, pixelben}
elozoy := 435-round(435*x);                  {u.a. csak függőlegesen}
moveto(elozox,elozoy);
i:=1;                                        {ciklusváltozó}
while i <= 31 do                              {31 időszakon követjük figyelemmel a
                                                populációváltozást}
begin
  yk := 435-round(435*a*xt*(1-xt)); {a következő időszak egyedszámának
                                                a kiszámolása; függőleges
                                                koordináta meghatározása}
  xk:=i*koz;                                {a kirajzolendő pont vízszintes koordinátája}
  putpixel(xk,yk,red);
  lineto(elozox,elozoy);
  elozox:=xk;                                { a koordináták eltárolása}
  elozoy:=yk;
  xt := a*xt*(1-xt); {a következő időszak egyedszámának a kiszámolása}
  inc(i);
end;

```



Konkrét megvalósítását figyelhetjük meg a mellékelt programomban, a főmenü "Logisztikus függvény" menüpontját választva.

A program kezelése

A jobb felső sarokban lévő kezelőpanelen a fel és le nyilakkal mozoghatunk. Az aktuálisan kijelölt változó értékét a jobbra és balra nyilakkal változtathatjuk értelemszerűen. Az ábrázoló panelen azonnal mutatkozik a változás. A változtatható paraméterek a következők:

X0: a kezdőérték, alapértelmezés szerint értéke 0.05

A : az egyenlet paramétere, a növekedési együttható, alapértelmezés szerint 1.75

It : A rendszerbe beavatkozhatunk. Egy általunk kiválasztott időszakban növelhetjük vagy csökkenthetjük az éppen aktuális egyedszámot. Az It jelzi a beavatkozás időpontját.

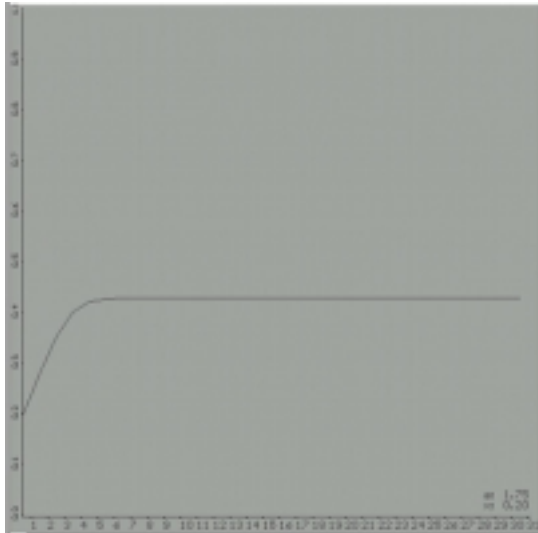
Delta: A beavatkozás mértéke. Alapértelmezés szerint nincsen beavatkozás.

Függ/Bifurkáció menüpont: Az Enter billentyűvel megnézhetjük a függvény bifurkációs diagrammját az adott paramétereket figyelembevéve.

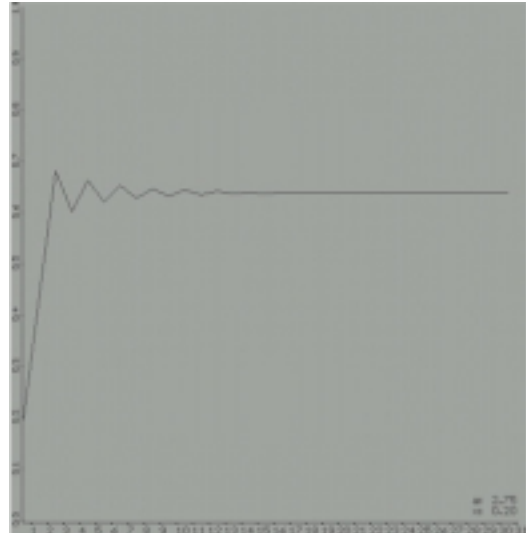
Magyarázat menüpont: Enter billentyűre magyarázatot kapunk.

Esc: Minden esetben visszalépés egy szinttel.

A program segítségével teszteljük a rendszer időbeli viselkedését néhány találmásra kiválasztott A paraméter mellett. Vessük össze az ábrák által kapott eredményeket az elvárt viselkedéstől. Azt már letisztáztuk, hogy a logisztikus leképezést kifejezetten az exponenciális növekedés zabolátlan jellegének korrigálása és a növekedés szükségképpen határai miatt vezettük be. Ennek megfelelően joggal véljük úgy, hogy iterációi valamilyen telítődési szinthez szépen odasimuló pályákat kell eredményezzenek. Azaz a valóságban a dinamikai rendszerek, így az állatpopulációk is a kevés kezdeti egyedszám után hirtelen növekednek, aztán a növekedési ütemük lelassul és beállnak egy viszonylag stabil állapotra.

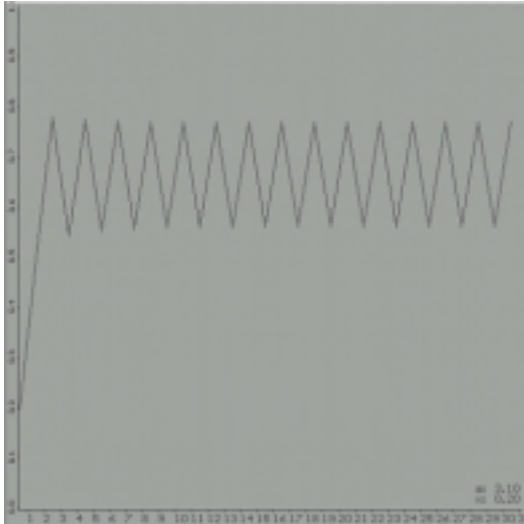


4.ábra. Logisztikus leképezés $A=1.75$ paraméter és $X(0)=0.2$ kiinduló érték mellett

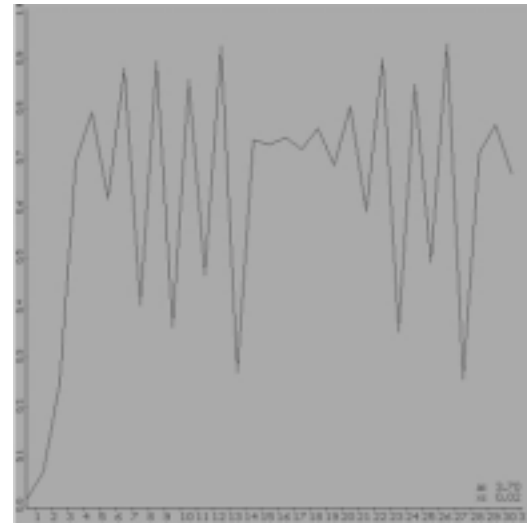


5.ábra. Logisztikus leképezés $A=2.75$ paraméter és $X(0)=0.2$ kiinduló érték mellett

Mi múlhat az A paraméteren? Az ábrák tanúsága szerint nyilvánvalóan az út amely a rendszer stabil állapotához vezet. A folyamat időbeli lefutását ábrázoló görbe, a kezdeti gyors növekedés után odasimul egy, a rendszer hosszú távú viselkedését jellemző fix értékhez (4.ábra). Amikor a paramétert nagyobbra vettük, kisebbfajta bizonytalanságot sugárzó oszcilláció után találja meg a rendszer a hosszútávú állapotát. (5. ábra). Az első két esetben tehát azt kaptuk, amit vártunk.



6.ábra. Logisztikus leképezés $A=3.1$ paraméter és $X(0)=0.2$ kiinduló érték mellett



7.ábra. Logisztikus leképezés $A=3.7$ paraméter és $X(0)=0.2$ kiinduló érték mellett

Azonban más a helyzet a harmadik és a negyedik leképezéssel. $A = 3.1$ paraméter mellett nem áll be a stabil állapot, a rendszer két állapot között oszcillál (6. ábra). Ez a valóságra lefordítva annyit tesz, hogy a rendszer viselkedése periodikus lesz. A populációknál maradván, a rendszer egész működése során két különböző egyedszámú lesz, egyik évben egy nagyobb egyedszám a másik évben egy kisebbegyedszám lesz jellemző a populációra, és ez ismétlődik kétévenként (Természetesen ez nem azt jelenti, hogy csak két különböző egyedszám lehetséges. Mivel a rendszer működését diszkrét időpontokra osztottuk, a két különböző egyedszám csak a vizsgált időpontokra jellemző).

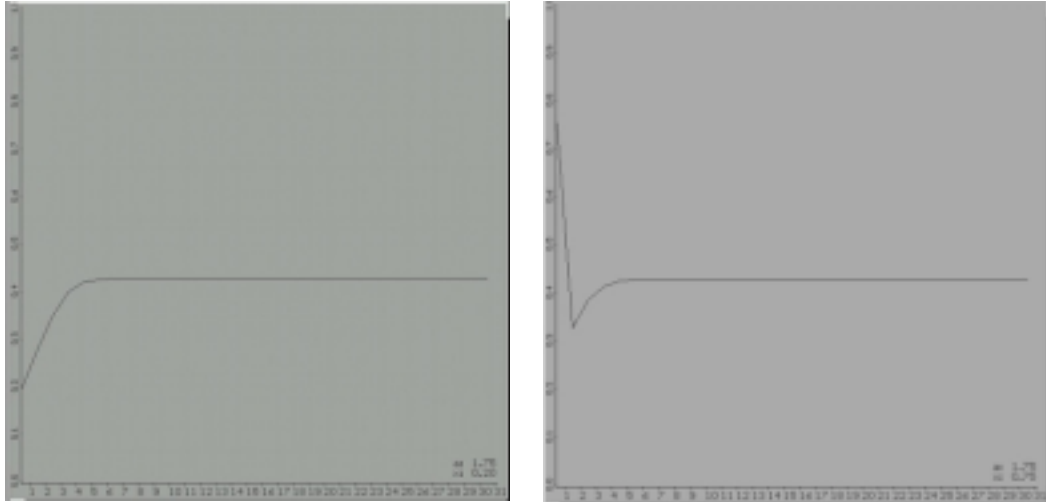
És azt, hogy a logisztikus leképezés bekerüljön egy olyan dolgozatba, amelyiknek a címe: Kaotikus Rendszerek, azt a negyedik leképezés grafikonjának (7. ábra) köszönheti. Ugyanis $A = 3.7$ paraméter mellett megjelenik a káosz. A rendszer, nem áll be egy stabil állapotra, nem lesz periodikus, hanem minden időpillanatban egy látszólag teljesen véletlen értéket vesz fel.

Kísérlet, megfigyelés

Tegyünk egy kis kitérőt. Rugaszkodjunk el a matematikai leírás módszereitől, és kísérletezzünk. Vizsgáljuk meg, hogyan reagál a program a különböző, bemeneti értékekre. Próbáljuk rendszerezni a bemenő értékeket, és próbáljunk meg következtetéseket levonni, hasonlóságokat észrevenni a különböző bemenő értékek által produkált grafikonokból. Persze ehhez az is szüksége, hogy egyszerre csak egy bemeneti értéket változtassunk és csak kis mértékben. A most következő rész mellőzi a matematikai szabványos leírási módszereket, a leírt dolgok csak észrevételeken alapulnak, hiányoznak a bizonyítások. A káoszelmélet kifejlődésében nagy szerepet játszott a bizonyos összefüggések és hasonlóságok felismerése a különböző bonyolult rendszerekben. Ezek az észrevételek aztán kutatásra készítették az egyes tudományok képviselőit. A sejtéseket bizonyítandók, a tudományos eszközöket csak ezután vetették be a jelenség vizsgálatára, leírására. Tehát a következőben leírtak csupán észrevételek, sejtések, amelyeket a modell viselkedése kelthet bennünk, épp ezért tudományos kivizsgálásra szorulnak.

Azt már megállapítottuk, hogy az A paraméter mindenképpen meghatározza azt az utat, ahogy a rendszer viselkedik. Most nézzük meg, hogy hogyan függ a rendszer viselkedése a kezdőértéktől. Ennek vizsgálatára, azonos A paraméterek mellett, változtassuk a kezdőértéket.

Elegendő kísérlet elvégzése után érdekes következtetést vonhatunk le a rendszer viselkedése és a kezdőérték kapcsolata között. Ha az A paramétert viszonylag kicsinek vesszük (gondolok itt akkorára, hogy a rendszer még megtalálja a stabil állapotot), akkor a kezdőérték változtatása nincsen hatással a stabil állapot értékére. (8. ábra) Ebből arra következtethetünk, hogy ilyen A paraméterek esetén nemcsak az utat határozza meg az A paraméter, hanem azt is, hogy mely értéknél (egyedszámnál) találja meg a rendszer a stabil állapotot. Ezek szerint lehetséges, hogy a kezdőérték – ilyen A paraméterek esetén - csak annak az iterációnak a sorszámára van



8.ábra. Logisztikus leképezés $A=1.75$ paraméter mellett. Az első esetben $X(0)=0.2$ kiinduló érték a második esetben $X(0)=0.75$. Megfelelően sok kísérlet elvégzése esetén, megfigyelhetjük, hogy a különböző kezdőértékek ellenére a grafikon is ugyanazt a stabil állapotot veszi fel. Ebből arra következtethetünk, hogy megfelelően kicsi A paraméternél a stabil állapot értéke csak az A paraméter függvénye.

hatással, amelyben beáll a stabil állapot. Ennek a kiderítésére is végezzünk kísérleteket a program segítségével.

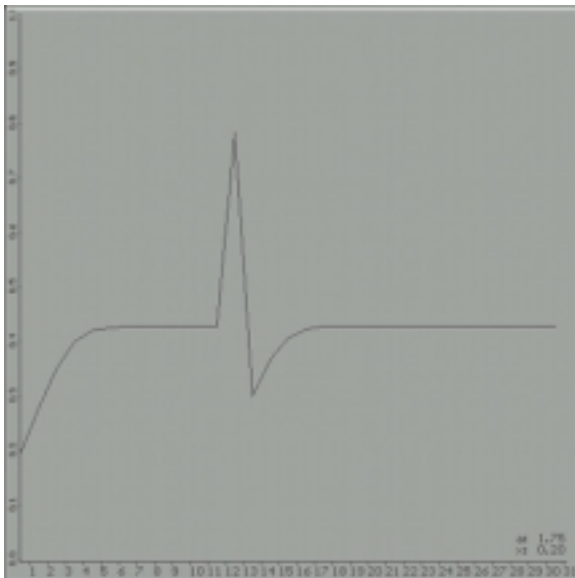
Amikor az A paraméter olyan értékű, hogy a rendszer egy bizonyos idő után periodikus jelleget ölt, - legyen az akár kettes, négyes vagy nyolcas periódus -, akkor a grafikon viselkedéséből arra következtethetünk, hogy a periodikus viselkedés beálltával, jelentkező rendszerállapotra szintén nincsen hatással a kezdőérték. Azaz a leképezés grafikonja a periodikus viselkedés beálltával ugyanazok az értékek között fog váltakozni, függetlenül a kezdőértékektől. És talán a kezdőérték itt is csak a periodikus viselkedés beállításának az idejére van hatással.

Nagyobb A paraméter esetén, a grafikonon tovább bonyolódik, megjelenik a káosz. A grafikont elnézve olyan érzésünk támad, hogy ilyen esetekben a kezdőérték már hatással van a rendszer egyes állapotaira.

A grafikon vizsgálatából még a következő tulajdonságokra figyelhetünk fel. Az előbbieken az A paraméter nagyságának az arányában vizsgáltuk a kezdőérték, és a rendszer kapcsolatát. Ha az A paraméter egy bizonyos intervallumon belül volt akkor a kezdőértékekre hasonlóan reagált a rendszer. De nem említettem az egyes estekhez tartozó pontos

intervallumot, amelybe az A paraméter tartozik. Nos mivel a most leírtak csak megfigyelésen alapulnak, nem tudok és nem is áll szándékomban pontos számadatokat közölni. De a rendszer viselkedéséből, megközelítőleg, a következő intervallumokra gondolhatunk: Ha az A paraméter kisebb vagy egyenlő egyel, a populáció kihal. Ha az A értéke 1 és kb. 3. között van akkor a rendszer bizonyos iteráció után elér egy stabil állapotot. Ha az A 3 és kb. 3.6 között van akkor a rendszer bizonyos idő után periodikusan viselkedik, először kettős, majd négyes, nyolcas stb. periódus áll be. És ha A nagyobb mint 3.6 akkor a rendszer kaotikusan viselkedik.

Programunk segítségével nézzük meg, hogyan reagál a rendszer a beavatkozásra. Mivel az előzőekben észrevettük, hogy a rendszer stabil és periodikus állapotaira nem volt hatással a kezdeti érték változtatása, feltételezhetjük, hogy a beavatkozás sem lesz hatással a rendszer későbbi állapotaira, mivel a beavatkozást tekinthetjük egy kezdőérték adásnak is. A rendszert leíró egyenlet nem változik, csak a bemeneti érték. (9. ábra)



9. ábra. Beavatkozás a rendszerbe.

$A=3.7$ paraméter és $X(0)=0.2$ kiinduló érték mellett a 11. -ik iterációban beavatkoztunk a rendszerbe 0.35 -el növeltük az aktuális értéket.

Megfigyelhetjük, hogy a néhány iteráció alatt a rendszer visszaáll a stabil állapotra a beavatkozásnak nyoma se maradt.

A logisztikus leképezés és a káosz

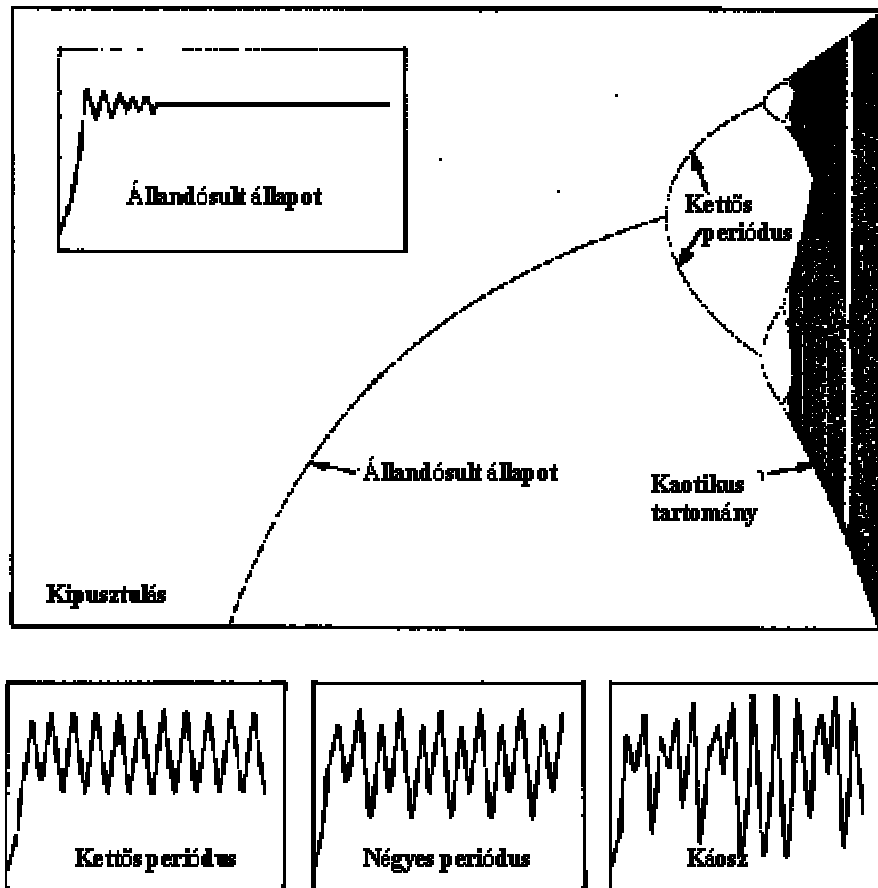
A kaotikus rendszerek egyik fontos tulajdonsága, hogy viselkedésüket néhány egyszerű egyenlet határozza meg, amelyek nagyon bonyolult

eredményeket is produkálhatnak. A most bemutatott logisztikus leképezés bemutatása révén talán könnyebben felfoghatóvá vált ez a tulajdonsága a rendszernek. És nem mehetünk el a kaotikus rendszerek azon tulajdonsága mellett sem, hogy érzékenyek a kezdeti feltételekre. A logisztikus leképezés példájánál maradva az A paraméter kis arányú változtatása a rendszer egészében, a kezdőérték változtatása pedig a kaotikus tartományban, egészen eltérő rendszerviselkedést produkált.

Bifurkációs diagramm (periódus- ketöződések és a káosz)

Különböző termékenységű populációk viselkedésének bemutatására Robert May és más tudósok egyedi ábrák helyett "bifurkációs ábrát használtak": egyetlen képbe sűrítették az összes információt. A bifurkációs diagram lényege, hogy több, - különböző paraméterű - a logisztikus függvény szélsőértékeit ábrázoljuk a koordináta rendszer függőleges tengelye mentén. A vízszintes tengelyen az A paraméter értékei sorakoznak, balról jobbra növekedve. A logisztikus függvény szélsőértékei reprezentálják az egyes időszakok egyedszámait.

Ahol a paraméter túl kicsi (a 9. ábrán balra), ott kipusztul a populáció. A paraméter növekedtével (középen) nő az egyedszám egyensúlyi értéke. Azután ahogy a paraméter tovább növekszik, az egyensúly kettészakad, az egyedszám elkezd két különböző szint között váltakozni. A kettéhasadások vagy - latin eredetű szóval - bifurkációk egyre gyorsabban követik egymást. A rendszer később kaotikussá válik (jobbra), és az egyedszám végtelen sok különböző értéket vesz fel



9. ábra Az ábra azt mutatja, hogy egy paraméter változásai hogyan változtatják meg ennek az egyszerű rendszernek a viselkedését a végállapotban. A paraméter növelése bizonyos értelemben azt jelenti, hogy a rendszert "keményebben hajtjuk", fokozzuk a lineáristól való eltérését.. (James Gleick - Káosz - Egy Új Tudomány Születése 88. old.)

A bifurkációs diagram számítógépes megvalósítása Pascal nyelven.

A megvalósításhoz két egymásbaágyazot ciklusra van szükségünk. A külső ciklusban növeljük az A paraméter értékét 0-tól 4-ig, a belső ciklusban pedig az aktuális A paraméterrel számoljuk ki a logisztikus függvény egyes értékeit.

```
v:=0;           {Az ábrázolandó pontok vízszintes koordinátája}
a:=0;           {Az aktuális A paraméter}
```

```

while (a<4) do           {Ciklus amíg a paraméter kisebb mint 4, külső
                        ciklus az A paraméter értékének a
                        kiszámolásához}

begin
  x:=0.05;              .....{A kezdő egyedszám}
  for i:= 1 to 30 do x:=a*x*(1-x); {Az első 30 időszak egyedszámának
                                kiszámolása, ezt még nem
                                ábrázoljuk.}

  for i:= 30 to 90 do   {Ebben a ciklusban számoljuk ki az
                        30-90 időszak egyedszámait. }

  begin
    uj :=370-round(250*a*x*(1-x)); {Az i. -ik időszak egyedszámának az
                                ábrázolásához szükséges függőleges
                                koordináta kiszámolás.}

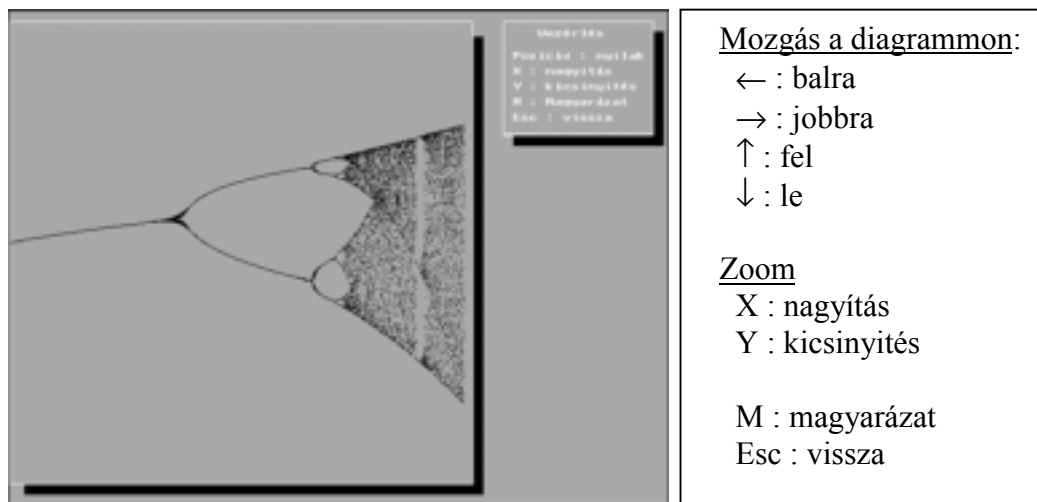
    putpixel(v-640,uj,white);      {Az i. -ik időszak egyedszámának
                                ábrázolása.}

    x:=a*x*(1-x); {A következő időszak egyedszámának meghatározása.}
  end;

  v:=v+1;           {A vízszintes koordináta növelése.}

  a:=a+0.004;      {Az A paraméter növelése.}
end;

```



10. Ábra. Programkép II. A bifurkációs diagramm megvalósítása.

Irodalomjegyzék:

Fokasz Nikosz : Káosz és Fraktálok. Bevezetés a kaotikus dinamikus rendszerek matematikájába - szociológusoknak. Új Mandátum Könyvkiadó, Budapest, 1999.

James Gleick (1987): Káosz - Egy új tudomány születése. Göncöl Kiadó, Budapest, 1999.

Szépfalusy Péter - Tél Tamás (1982 szerk): A káosz. Akadémiai Kiadó, Budapest.

Internetes forrásjegyzék:

<http://www.kfki.hu/~cheminfo/hun/olvaso/kaosz.html>

Magyar nyelvű cikkgyűjtemény.

http://library.thinkquest.org/3120/main_content.html

The Chaos Experience Website

Káosz elmélet története, kaotikus jelenségek, példák az életből, szótár, animált képgaléria

<http://www.imho.com/grae/chaos/chaos.html>

Fraktáldimenziókról:

<http://library.thinkquest.org/12170/>

Making Order Out of Chaos

Néhány kutatóról és munkáikról, oszcilláció, attraktorok, fázistér, komplex számok, fraktálok, N-test probléma, letölthető képek, Fractint program:

<http://www-chaos.umd.edu/>

Chaos at Maryland

A Maryland. -i Egyetem honlapja a káoszlól:

<http://serendip.brynmawr.edu/>

Serendip

Komplex számok, biológia, agy és a viselkedés kapcsolata a káossal

<http://library.thinkquest.org/3493/>

Chaos Theory, Dynamic Systems, And Fractal Geometry

Káoszelmélet, fraktálgeometria,